

Tracker Como Instrumento Para La Construcción De Relaciones Entre El Mundo Real Y Las Matemáticas: La Parábola Como Lugar Geométrico

Cristian Alejandro Guzmán Ruiz

Magíster en Educación con énfasis en Educación Matemática
Universidad Distrital Francisco José de Caldas
crisalegur@gmail.com

Fecha de recepción del artículo: (19 enero 2022); Aceptado: (18 abril 2022)

Resumen

Modelar fenómenos reales ha sido un reto que la nueva generación de profesores se ha propuesto, y más aún, al usar una herramienta tecnológica que permita establecer relaciones entre los objetos matemáticos involucrados y la misma situación real; lo que busca esta experiencia de aula, es hacer la modelación de un objeto matemático (parábola como lugar geométrico) haciendo transformaciones -a través de manipulaciones algebraicas- entre diferentes representaciones semióticas por medio del software Geogebra y Tracker. Estos programas son utilizados por estudiantes de grado décimo y les permite establecer relaciones de igualdad, comparar expresiones algebraicas que modelan el lanzamiento de un avión de papel y dinamizar el proceso de aprendizaje por medio de hipótesis abordadas desde las matemáticas dinámicas.

El trabajo está enmarcado desde una perspectiva semiótica de las matemáticas (Duval, 1999) la cual indica que el estudiante logra una aprehensión del objeto matemático entre más representaciones semióticas pueda transformar y reconocer como iguales, bien sea en el mismo registro de representación o desde otros sistemas de representación; así mismo, cada uno de los momentos de la clase se pensaron desde lo planteado por Freudenthal (1983), que valida la importancia de utilizar modelos emergentes de la propia actividad matemática los cuales representan la situación.

Palabras clave: Modelación, matemática realista, representaciones semióticas, Tracker.

Abstract

Modeling real phenomena has been a challenge that the new generation of teachers has proposed, and even more so, when using a technological tool that allows establishing relationships between the mathematical objects involved and the real situation itself; what this classroom experience seeks is to model a mathematical object (parabola as a locus) by making transformations -through algebraic manipulations- between different semiotic representations by means of the Geogebra and Tracker software. These programs are used by tenth grade students and allow them to establish equality relation, compare algebraic expressions that model the launch of a paper airplane, and streamline the learning process through hypotheses approached by dynamic mathematics.

The work is framed from a semiotic perspective of mathematics (Duval, 1999) which indicates that the student achieves an apprehension of the mathematical object between more semiotic representations can transform and recognize as equals, either in the same representation register or from other representation systems; Likewise, each of the moments of the class were thought from Freudenthal (1983) proposed, which validates the importance of using emergent models of the mathematical activity itself, which represent the situation.

Keywords: Modeling, realistic mathematics, Tracker, semiotic representations.

Introducción

La necesidad de construir modelos, establecer relaciones con el mundo real y transformar representaciones matemáticas, ha sido una prioridad para los profesores de matemáticas, especialmente en áreas como el álgebra y la trigonometría; en estudios realizados por Guzmán & Ávila (2020) se identifican algunos elementos necesarios para que el estudiante pueda generar expresiones alfanuméricas que posibilitan la modelación de situaciones asociadas al pensamiento algebraico, además de ello indican que existen representaciones que transitan entre dos registros de representación que corresponden a un mismo objeto. Esta experiencia de aula busca establecer algunas relaciones entre la simulación de un fenómeno real y su respectiva modelación, empleando transformaciones de diversas representaciones que puede tener la parábola como lugar geométrico. Según Blum & Borromeo (2009), los procesos de modelación deben corresponder a un ciclo que inicia en la situación real, en este ciclo se deben desarrollar actividades de las matemáticas donde intervienen las representaciones, el uso de métodos, la comprensión de nuevos objetos y la creación de estrategias matemáticas que posibiliten analizar el fenómeno real; de esta manera, se busca que por medio de las transformaciones de tratamiento y de conversión se comprenda el objeto matemático representado por el software, construyendo hipótesis y conjeturas relacionadas a la estructura algebraica de la expresión, la similitudes y/o diferencias en su representación gráfica y relaciones entre las representaciones tabulares.

Dado lo anterior, se plantea una pregunta que orienta este trabajo ¿De qué manera un software permite a las estudiantes relacionar y analizar fenómenos reales con modelos matemáticos, transformando algunas de sus representaciones? Es evidente que el proceso de modelación matemática logra el desarrollo del pensamiento y la comprensión del objeto implicado, donde las relaciones con los objetos matemáticos involucrados en dicho proceso permiten el análisis más preciso del mundo real y las implicaciones con la transformación de representaciones (Forero, 2016).

Marco de Referencia

En un principio se tenía como eje fundamental el uso de un software que permitiera a las estudiantes interactuar con el objeto matemático y que ellas mismas hicieran construcciones, es decir, pasar de un aprendizaje tradicional a uno constructivista en el que el aprendizaje adquiere un mayor significado para el estudiante por la forma en que se articula el concepto haciendo uso de la tecnología; por esta razón se pensó en lo planteado por Ávila et al (2007), los cuales indican que el uso de un software donde se puedan aplicar conceptos de las matemáticas proporciona un ambiente de trabajo dinámico e interactivo; para estos autores, algunas habilidades pueden ser desarrolladas integrando al trabajo matemático propio del estudiante y el software matemático. En tal sentido, con el uso del software, la atención se enfoca en facilitar que el estudiante aprenda a procesar

la información, así como en la transferencia, la generalización de los aprendizajes a otros aspectos académicos, la creación de hipótesis y la posibilidad de validar sus propias construcciones matemáticas. Así mismo, las producciones hechas junto con las hipótesis planteadas (más allá de la ejercitación de procedimientos) y los procesos de argumentación, son aspectos primarios para el desarrollo de las habilidades del pensamiento de orden superior (Martín, 2001).

Ahora bien, para llevar a cabo esa inclusión de un software y su respectiva interacción que permitiera la construcción de modelos y transformación de representaciones, era de vital importancia enfocar el desarrollo de la actividad en un marco desde la didáctica de las matemáticas para darle un horizonte al proceso de aprendizaje; dado lo anterior, la situación didáctica estuvo enmarcada de aquellos medios didácticos que son la acción, la formulación y la validación (Brousseau, 2007)

Dentro de lo planteado en las situaciones didácticas de Brousseau (2007), en la situación acción el estudian-

te trabaja de manera autónoma con el problema, aplica sus conocimientos previos y utiliza algunas estrategias para desarrollar un saber, la situación de formulación permite el trabajo en equipo, desarrollando la comunicación en la construcción de conocimientos; la situación de validación se pone a juicio de un interlocutor el producto obtenido de la interacción grupal e individual con el medio y el objeto matemático, para luego finalizar con el proceso de institucionalización, el cual es de suma importancia para el cierre de la situación didáctica porque los estudiantes ya han construido su conocimiento y el docente clarifica convierte ese saber particular en algo más general. Así, la teoría de situaciones didácticas, como herramienta metodológica, permite la construcción de modelos, la transformación de representaciones y el razonamiento desde una representación modelada por un software y su respectiva interacción. A continuación, se muestra una tabla donde se relaciona cada uno de los episodios de la experiencia de aula junto con lo planteado en teoría de situaciones didácticas:

Tabla 1. Relación entre los episodios situaciones didácticas (Brousseau 2007) y los episodios en la experiencia de aula

Situaciones didácticas	Momentos en la experiencia didáctica
Situación acción	Interacción con el programa, construcción de conceptos algebraicos previos
Situación de formulación	Construcción de equipos de trabajo, creación de hipótesis y modelos
Situación de validación	Transformación de representaciones, validación con Excel, Tracker y GeoGebra
Situación de institucionalización	Socialización de hallazgos y elaboración de un informe con las correcciones del docente

Aspectos metodológicos

A continuación, se mostrará cada uno de los momentos y acciones hechas por estudiantes de grado décimo, durante todo el proceso de construcción de la parábola (donde el software Tracker fue un medio tecnológico indispensable en el proceso) y la transfor-

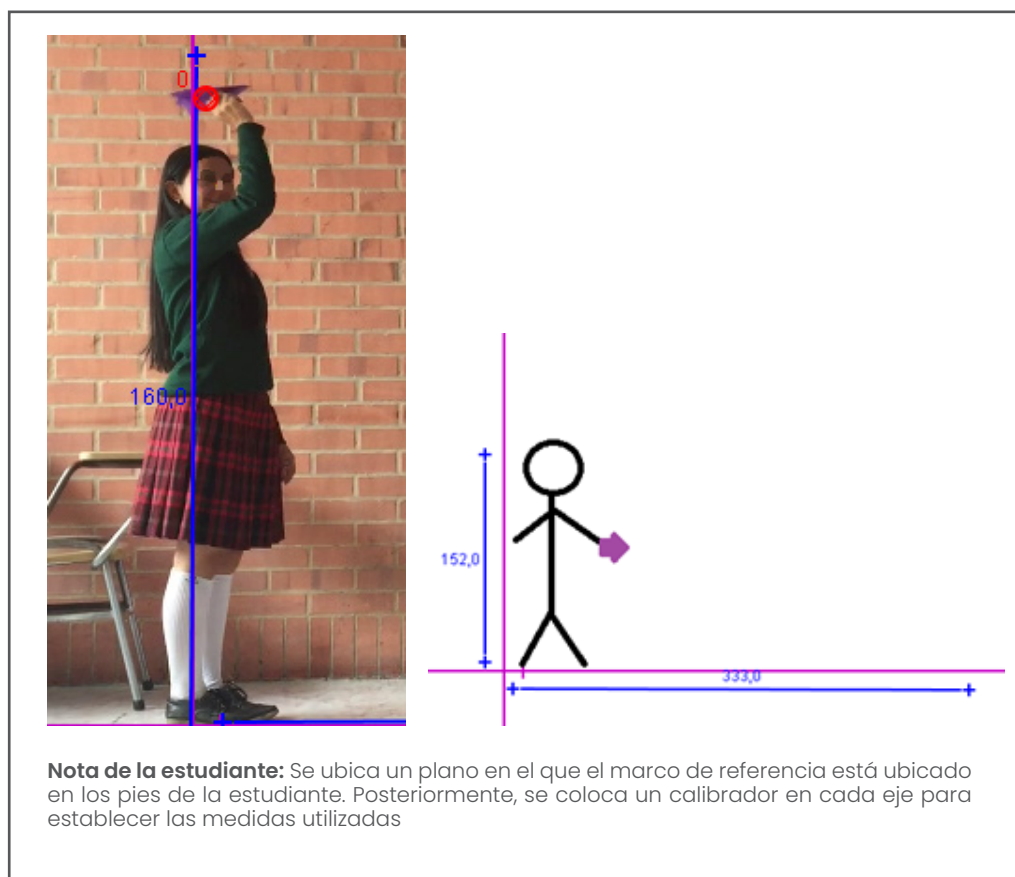
mación a diferentes representaciones haciendo uso de manipulaciones algebraicas.

- ✓ **Situación inicial:** Partiendo del principio de realidad planteado por Freudenthal (1983), las estu-

diantes debían formar parejas de trabajo donde inicialmente, su labor era construir un avión de papel, que fuera capaz de avanzar más de un metro y su caída al momento de ser lanzado tuviera forma parabólica; las condiciones para la construcción se basaban en que el avión de papel debía ser blanco y el lanzamiento debía hacerse con un fondo de color oscuro, es decir, el movimiento o la trayectoria del avión debía notarse.

- ✓ **Intervención con el programa:** Las estudiantes debían realizar un video que mostrara el recorrido (parabólico preferiblemente) del avión hecho en papel, luego de tomar medidas correspondientes como la altura del lanzamiento, la distancia recorrida del objeto y el tiempo de caída se procede a importar el video al software Tracker; luego de ello, se crean los ejes de modo que se coloquen las medidas anteriormente tomadas (Ver imagen 1).

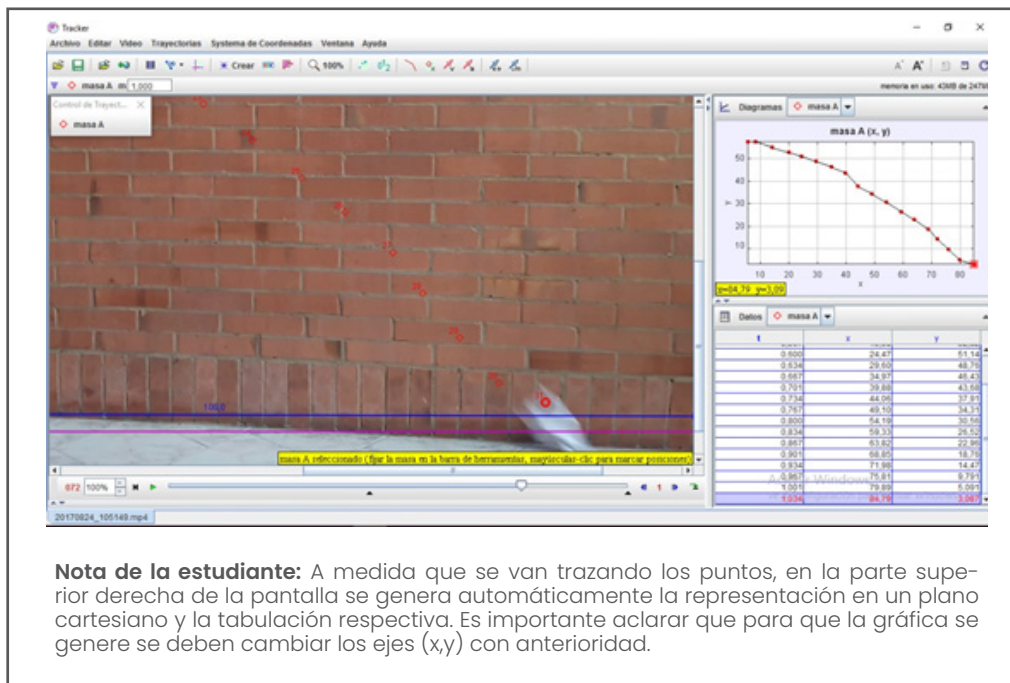
Imagen 1. Reconocimiento de la masa y su sistema de referencia



- ✓ **Representaciones del movimiento (modelos):** En este momento, las estudiantes se dieron cuenta que las variables a considerar en el lanzamiento debían ser la altura alcanzada por el avión que es representada por el eje y junto con la distancia horizontal recorrida que se representa por el eje x. Luego que el programa identifica la masa pun-

tual que tiene el movimiento (avión), se crean unos puntos correspondientes al rastro del objeto y así mismo empiezan a aparecer las representaciones gráficas y tabulares, cabe aclarar que las representaciones dependen exclusivamente de las variables que se le asignen desde un principio (Ver imagen 2)

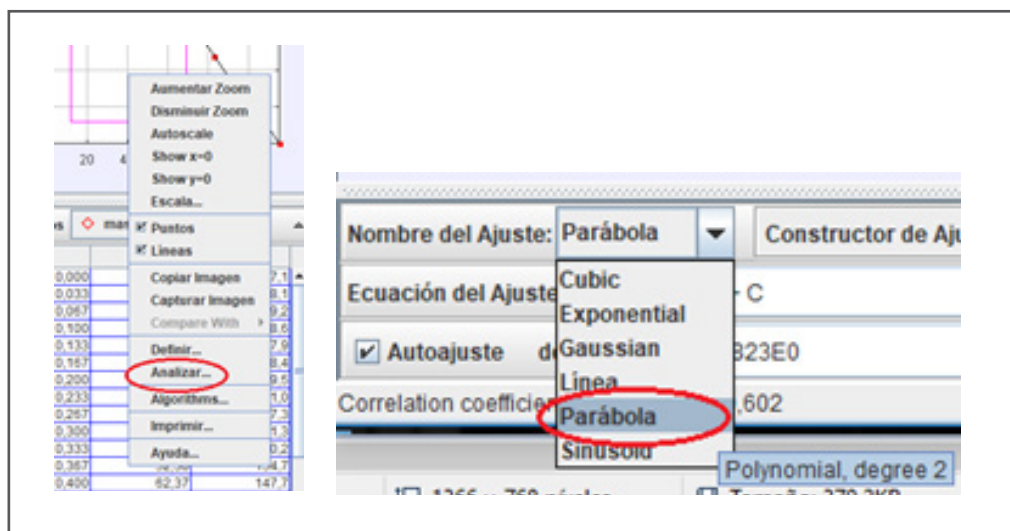
Imagen 2. Obtención de tablas y graficas a partir del rastro del objeto



✓ **Modelo algebraico del movimiento desde Tracker:** Posterior a ello, se crea el modelo matemático del rastro en el movimiento hecho por el avión (tipo regresión cuadrática); de acuerdo con la imagen anterior, es posible encontrar en cada uno de los programas, las representaciones tabulares y gráficas, pero adicionalmente, se puede configurar el software para que genere una representación

algebraica cuya forma es $y=ax^2+bx+c$; este modelo aparece cuando las estudiantes dan la opción “analizar” a los valores generados en la tabla, de esta manera se puede ajustar este modelo algebraico a una forma lineal, exponencial, entre otros. Como el objetivo es representar a partir de un modelo cuadrático, entonces es indispensable que sea seleccionada esta opción (ver imagen 3)

Imagen 3. Análisis y ajustes del modelo gráfico.



De esta manera, las estudiantes encontraron una expresión algebraica que relaciona la distancia horizontal alcanzada por el avión y la altura en ese punto específico, sin embargo, esta expresión tiene notaciones no convencionales por las estudiantes

y por esta razón ellas procedieron a hacer las respectivas transformaciones de tratamiento (representación exponencial a representación decimal) por medio de manipulaciones aritméticas (Ver imagen 4)

Imagen 4. Uso de coeficientes y variables para hallar la expresión correspondiente

De esta forma, se obtiene la siguiente ecuación.

Parámetro	Valor
A	-7,466E-3
B	4,859E-1
C	1,484E2

Parámetro	Valor
A	-0,007
B	0,46
C	148,40

$y = Ax^2 + Bx + C$
 $y = -0,007x^2 + 0,46x + 148,40$

La ecuación de la parábola está dada por la forma $x^2 + bx + c = y$, por lo cual lo único que se debe hacer es reemplazar los coeficientes que arroja el programa. Cabe aclarar que primero es necesario cambiar los datos expresados en notación científica.

Nota: Este es el fragmento de un informe perteneciente a un grupo de trabajo que debieron hacer la transformación de tratamiento entre dos representaciones.

✓ **Modelo algebraico del movimiento desde Excel:** Luego de obtener la expresión algebraica, se solicitó a las estudiantes que hicieran un comparativo de dicha ecuación con otro modelo, pero esta vez desde el programa Excel. Allí, las estudiantes

tomaban los datos que se encontraban en la tabla e inmediatamente creaban en Excel su respectiva gráfica. Luego de ello, cada uno de los grupos debían determinar las similitudes y diferencias entre las respectivas gráficas y tablas (Ver tabla 2)

Tabla 2. Relación tratamiento de representaciones tabular y gráfica vista desde Tracker y Excel

Representaciones de Tracker		Representaciones de Excel																																																																			
Gráfica-ecuación	Tabular	Gráfica-ecuación	Tabular																																																																		
$y = -0.007x^2 + 0.46x + 148.40$	<table><tr><th>x</th><th>y</th></tr><tr><td>1.5318</td><td>148.3675</td></tr><tr><td>1.9695</td><td>149.4617</td></tr><tr><td>3.9390</td><td>150.9935</td></tr><tr><td>12.9110</td><td>157.3396</td></tr><tr><td>26.0409</td><td>161.2786</td></tr><tr><td>42.0156</td><td>160.1844</td></tr><tr><td>52.3006</td><td>154.7136</td></tr><tr><td>62.3669</td><td>147.7110</td></tr><tr><td>72.6519</td><td>141.1461</td></tr><tr><td>83.1558</td><td>133.4870</td></tr><tr><td>93.4409</td><td>124.7338</td></tr><tr><td>105.9143</td><td>117.0747</td></tr><tr><td>115.1052</td><td>109.8532</td></tr></table>	x	y	1.5318	148.3675	1.9695	149.4617	3.9390	150.9935	12.9110	157.3396	26.0409	161.2786	42.0156	160.1844	52.3006	154.7136	62.3669	147.7110	72.6519	141.1461	83.1558	133.4870	93.4409	124.7338	105.9143	117.0747	115.1052	109.8532	Movimiento parabólico $y = -0.0075x^2 + 0.4659x + 148.43$	<table><tr><th>x</th><th>y</th></tr><tr><td>3.064</td><td>147.055</td></tr><tr><td>2.845</td><td>148.149</td></tr><tr><td>3.501</td><td>149.243</td></tr><tr><td>3.262</td><td>148.586</td></tr><tr><td>1.054</td><td>147.930</td></tr><tr><td>1.532</td><td>148.368</td></tr><tr><td>1.969</td><td>149.462</td></tr><tr><td>3.939</td><td>150.993</td></tr><tr><td>12.911</td><td>157.340</td></tr><tr><td>26.041</td><td>161.279</td></tr><tr><td>42.016</td><td>160.184</td></tr><tr><td>52.301</td><td>154.714</td></tr><tr><td>62.367</td><td>147.711</td></tr><tr><td>72.652</td><td>141.146</td></tr><tr><td>83.156</td><td>133.487</td></tr><tr><td>93.441</td><td>124.734</td></tr><tr><td>105.914</td><td>117.075</td></tr><tr><td>115.105</td><td>109.853</td></tr></table>	x	y	3.064	147.055	2.845	148.149	3.501	149.243	3.262	148.586	1.054	147.930	1.532	148.368	1.969	149.462	3.939	150.993	12.911	157.340	26.041	161.279	42.016	160.184	52.301	154.714	62.367	147.711	72.652	141.146	83.156	133.487	93.441	124.734	105.914	117.075	115.105	109.853
x	y																																																																				
1.5318	148.3675																																																																				
1.9695	149.4617																																																																				
3.9390	150.9935																																																																				
12.9110	157.3396																																																																				
26.0409	161.2786																																																																				
42.0156	160.1844																																																																				
52.3006	154.7136																																																																				
62.3669	147.7110																																																																				
72.6519	141.1461																																																																				
83.1558	133.4870																																																																				
93.4409	124.7338																																																																				
105.9143	117.0747																																																																				
115.1052	109.8532																																																																				
x	y																																																																				
3.064	147.055																																																																				
2.845	148.149																																																																				
3.501	149.243																																																																				
3.262	148.586																																																																				
1.054	147.930																																																																				
1.532	148.368																																																																				
1.969	149.462																																																																				
3.939	150.993																																																																				
12.911	157.340																																																																				
26.041	161.279																																																																				
42.016	160.184																																																																				
52.301	154.714																																																																				
62.367	147.711																																																																				
72.652	141.146																																																																				
83.156	133.487																																																																				
93.441	124.734																																																																				
105.914	117.075																																																																				
115.105	109.853																																																																				

Interpretación de una estudiante: “Aparentemente las gráficas son bastante similares, ya que están realizadas con los mismos datos. Se observa que la parábola realizada en Excel tiene mayor dilatación que la realizada en Tracker, esto se debe a las escalas utilizadas en los ejes, sin embargo, la información que expresan gráficamente es la misma”

Es evidente que, al momento de hacer las respectivas relaciones entre cada uno de los modelos, las estudiantes hacen hipótesis intentando usar un lenguaje formal que les permite de manera clara identificar puntos semejantes (coordenadas), dilataciones en las gráficas, equivalencias sintácticas en las expresiones algebraicas, entre otras; el siguiente fragmento es una respuesta que se da en uno de los grupos de trabajo a la pregunta ¿Existe alguna diferencia entre las gráficas generadas?:

“Si se analizan los puntos y las parábolas trazadas por los programas respectivos, se observa que ambas mantienen las mismas características y los puntos que salen del rastro en las partes señaladas.

Por otra parte, aunque las ecuaciones arrojadas se asemejan, mantienen una diferencia de dos unidades¹ en el coeficiente B: 0, 46 y 0,48 en excel y tracker respectivamente”

- ✓ **Coordenadas de otros puntos:** Se tiene que la coordenada para el vértice o punto máximo de la parábola se define como $v\left(\frac{-b}{2a}, f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)$, ahora bien, con la representación algebraica de la parábola y

por medio de algunos métodos algebraicos, las estudiantes lograron obtener este valor fundamental que se llamó como la coordenada (h,k) ; desde la literatura en matemáticas, se entiende que los valores $-b$ y $2a$, son aquellos coeficientes de la expresión general de la parábola $y = ax^2 + bx + c$. Así mismo, cada uno de los grupos de trabajo lograron identificar los puntos donde corta la parábola el eje X de la siguiente manera (ya que los coeficientes de la expresión algebraica $a, b, c \in \mathbb{Q}$):

$$P(x, 0) \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Para todas las parábolas se cumplía que} \\ b^2 - 4ac \geq 0 \text{ y también el vértice está en la coordenada } (h,k) \text{ con } h, k > 0, \\ \text{ya que el vértice se encontraba en el cuadrante I del plano cartesiano era imposible que sus componentes fueran menores a cero.} \end{array}$$

Ya con esos resultados, las estudiantes pudieron encontrar los elementos (h,k) correspondientes al vértice de la parábola cuya forma canónica es $(x-h)^2 = 4p(y-k)$, dada esta expresión basta encontrar el término p (Ver imagen 5)

Imagen 5. Uso de coeficientes y variables para hallar el vértice

• El vértice lo encontramos:

1.
$$h = \frac{-b}{2a}$$
$$h = \frac{-(-0,2279)}{2(-0,0019)}$$
$$h = -59,97$$

2. Para encontrar la otra coordenada reemplazamos el valor anterior en la ecuación

$$K = -0,0019x^2 - 0,2279x + 176,02.$$

$$K = -0,0019(-59,97)^2 - 0,2279(-59,97) + 176,02$$

$$K = -6,83316 + 13,667 + 176,02$$

$$K = 182,85$$

• Después de hallar estos dos valores el vértice es: $(-59,97, 182,85)$

Nota: Este es el fragmento de un informe perteneciente a un grupo de trabajo, allí se evidencia el uso de los coeficientes arrojados por el programa y los procesos para hallar el vértice de la parábola.

1. Cabe aclarar que las estudiantes hacen referencia a las centésimas de los números decimales

- ✓ **Lado recto o distancia p de la expresión canónica:** Al momento de que las estudiantes despejen el término p , es indispensable usar las coordenadas del vértice (ya conocidos) y

$$\begin{aligned}(0 - h)^2 &= 4p(y - k) \\ h^2 &= 4p(y - k) \\ h^2 &= 4p(y - k) \\ \frac{h^2}{4(y - k)} &= p\end{aligned}$$

uno de los puntos de la parábola “ (x,y) ”; para ser más preciso, algunas estudiantes tomaron el punto donde exactamente sale el avión a volar, el cual es $(0,y)$, entonces se reemplaza en la expresión canónica para obtener la distancia p (Imagen 6)

Imagen 6. Uso de coeficientes y variables para hallar el lado recto

- La ecuación canónica de la parábola, queda determinada por:

$$(x - h)^2 = 4p(y - k).$$

$$(0 - (-59.97))^2 = 4p(176.02 - 182.85)$$
- Ahora vamos a hallar el valor de P para poder completar la gráfica en [geogebra](#) teniendo en cuenta el corte con el eje Y :

$$(0 - (-59.97))^2 = 4p(176.02 - 182.85)$$

$$3596.40 = 4p(-6.83)$$

$$\frac{3596.40}{(-6.83)} = 4p$$

$$\frac{-526.55}{4} = p$$

$$-131.63 = p$$

Nota: Este es el fragmento de un informe perteneciente a un grupo de trabajo, allí se evidencia el uso de los coeficientes arrojados por el programa y los procesos para hallar la distancia que hay entre el foco y el vértice de la parábola.

En este caso para todas las parábolas, en su expresión analítica, el término p es negativo debido a que, en todos los lanzamientos, los rastros mostraban una concavidad

$$\begin{aligned}(x - h)^2 &= 4p(0 - k) \\ (x - h)^2 &= 4p(-k) \\ -\frac{(x - h)^2}{4k} &= p\end{aligned}$$

hacia abajo. Otras estudiantes tomaron como referencia, uno de los cortes de la parábola en el eje X , es decir $P(x,0)$, reemplazando en la expresión canónica, estos puntos fueron hallados por la fórmula general de la cuadrática:

Imagen 7. Uso de coeficientes y variables para desarrollar la ecuación cuadrática

- Puntos de corte con el eje x :
 Para hallar los puntos de corte con el eje x hacemos uso de la ecuación cuadrática, en la que obtendremos dos respuestas correspondientes a cada corte.

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\frac{-0.46 \pm \sqrt{-0.46^2 - 4(-0.007)(148.4)}}{2(-0.007)}$$
 Realizamos las operaciones respectivas y obtenemos las siguientes respuestas:

$$X_1 = 182.12$$

$$X_2 = -116.40$$
 Las coordenadas de los cortes en el eje x son:

$$(182.12, 0) \quad (-116.40, 0)$$

Nota: Este es el fragmento de un informe perteneciente a un grupo de trabajo, allí se evidencia el uso de los coeficientes arrojados por el programa y los procesos para hallar los puntos de corte con el eje X por medio de la ecuación cuadrática.

- ✓ **Directriz:** Al tener la coordenada del foco en todas las parábolas generadas y teniendo la distancia “ p ” o el lado recto, las estudiantes procedieron a hallar la recta llamada directriz, que es una recta perpendicular al eje X y se encuentra a una distancia p del

vértice por el eje de simetría; por ende, se determinó sabiendo la coordenada del vértice $V:(h,k)$, entonces: $y=k-p$. Con esta distancia, se pudo determinar también la coordenada del foco en la parábola (Ver imagen 8)

Imagen 8. Uso de coeficientes y variables para hallar el foco

• **Coordenada del foco:**

Cuando tengamos el valor de la distancia del foco al vértice determinamos la coordenada del foco. Esta va a estar dada por la forma $(h, k - p)$. En la que le restamos la distancia de p a la coordenada ‘y’ del vértice.

$$(32.86, 155.95 - 37.519)$$

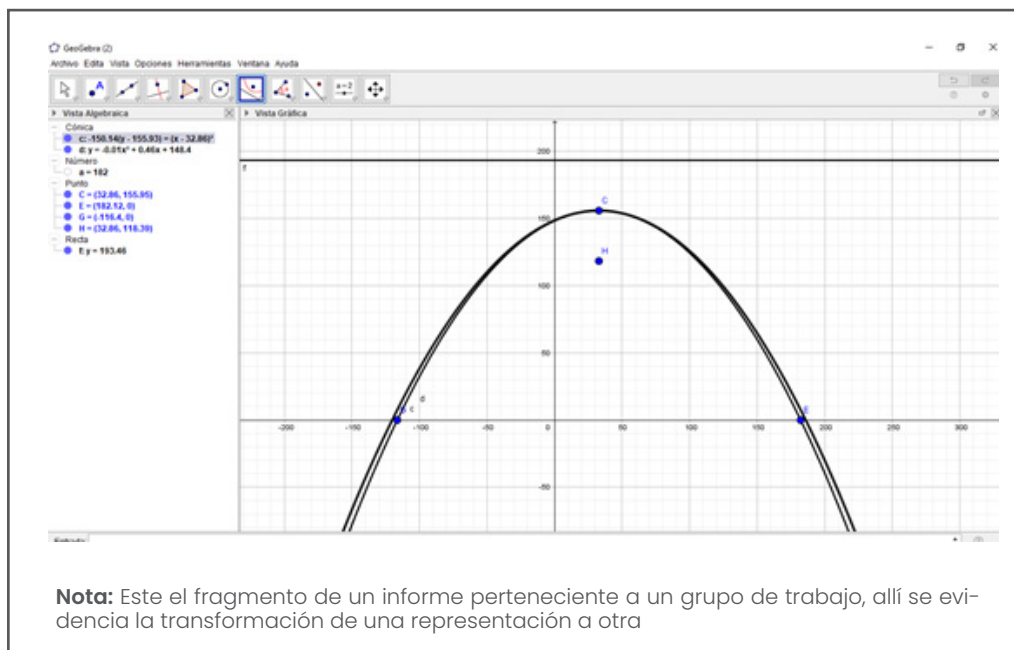
$$(32.86, 118.39)$$

Nota: Este es el fragmento de un informe perteneciente a un grupo de trabajo, allí se evidencia el uso de los coeficientes arrojados por el programa y los procesos para hallar la coordenada del foco

- ✓ **Representación gráfica y comparación de resultados:** Cuando las estudiantes tenían la expresión general y la canónica (analítica) de la misma parábola, procedieron a darle veracidad al tratamiento de representaciones hecho, insertando la ecuación general $y=ax^2+bx+c$ en el Software GeoGebra

para luego cambiar a la forma $(x-h)^2=4p(y-k)$, es importante resaltar que para poder graficar la parábola con la expresión canónica también es posible hacerlo con el punto (foco) y directriz como se muestra en la imagen 9:

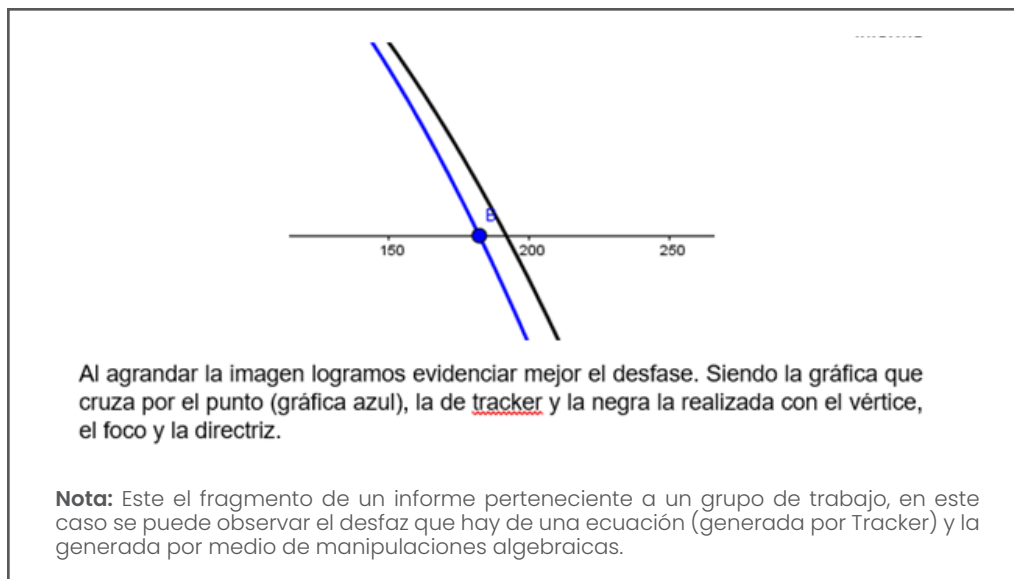
Imagen 9. Construcción de ambas representaciones gráficas (Tracker vs GeoGebra)



Aclaración: En la mayoría de los informes el margen de error en la expresión canónica que hallaron por medio de algoritmos a diferencia de la que mostraba GeoGebra fue mínimo y se eviden-

cia en las décimas de los números únicamente, en el peor de los casos, en las unidades de los valores (Ver imagen 10).

Imagen 10. Construcción de ambas representaciones gráficas (Tracker vs GeoGebra)



- ✓ **Socialización::** Al terminar y darle sentido a la situación, se procedió a escribir un informe tipo “trabajo de campo”, que estaba orientado por una guía donde era indispensable responder unos interrogantes con respecto a la situación. Posterior a ello, se socializan cada uno de los trabajos en el aula de clase para hacer los comentarios y correcciones respectivos; en estas socializaciones, las estudiantes a modo de relatoría o exposición mostraron diferentes maneras de abordar la situación y los diferentes modelos que salieron por cada uno de los lanzamientos.

A medida que cada grupo de trabajo pasaba a mostrar los resultados, se fueron develando procesos que permitían asociar estrategias algebraicas como aritméticas para encontrar los modelos (tablas, graficas, expresiones algebraicas), no se pudo llegar a una sola expresión y tampoco a un orden jerárquico en los procesos hechos, precisamente por la complejidad en el manejo de los datos al momento de lanzar el avión de papel, pero se logró un proceso de institucionalización que para Brousseau (2007) es convertir esas conclusiones en un saber general (formalizado).

Resultados

Cabe resaltar que el tratamiento y conversión de representaciones semióticas, posibilitó que las estudiantes se acercaran al objeto matemático (Duval, 1999) de una manera más dinámica y consecuente con una situación inicialmente no matemática. Es evidente que algunas de estas representaciones son más “manejables/cotidianas” para las estudiantes y por tal razón es importante el uso de los dos software, ya que permite de manera interactiva con el medio tecnológico pasar de un modelo a otro; por otro lado, es indispensable que el docente guíe con preguntas abiertas para que exista una relación entre el medio (software) y las manipulaciones aritméticas-algebraicas de la estudiante, ya que de esa relación emergen las representaciones; por la forma de construir el objeto matemático, las estudiantes mostraron bastante interés, aportando a su pareja de trabajo diversas estrategias y formas de abordar la situación, logrando modelarla con artefactos matemáticos. Para Guzmán & Ladino (2018), el uso de un software en procesos matemáticos permite la reorganización de actividades cognitivas que posibilitan un nivel superior a comparación de otros estudiantes, lo cual se ve reflejado en esta experiencia de aula ya

que las estudiantes obtuvieron un mayor manejo de aquellos elementos matemáticos involucrados, la interpretación de modelos y la construcción de hipótesis-destrezas propiamente argumentativas.

Por otro lado, el trabajo en equipo permite que se llegue a acuerdos y existan procesos de validación para cada hipótesis, sin embargo, la labor del docente fue fundamental en cada una de las actividades matemáticas ya que en algunos momentos, las estudiantes divagaban o no encontraban algún horizonte y empezaban a hacer procesos algebraicos innecesarios; de esta manera, las preguntas abiertas y el uso constante del software posibilita la transición constante entre una representación a otra en diferente registro de representación, logrando el estudiante apropiarse del objeto matemático implícito.

Recomendaciones

Es importante resaltar que esta actividad no tenía como objetivo construir el concepto de parábola o lugar geométrico ya que las estudiantes tenían varios conceptos previos a la aplicación; por esta razón, es fundamental que las estudiantes tengan un mínimo manejo de operaciones con expresiones algebraicas y que, además interactúen con el software GeoGebra ya que el proceso para construir puntos, insertar ecuaciones y mover elementos en el plano no se da en una misma clase. Por otro lado, se recomienda principalmente que para el uso del software Tracker, los estudiantes hagan importación de algunos videos donde puedan hacer el rastreo de masas puntuales y también interactuar con la interfaz del software, esto ahorraría mucho tiempo al momento de elaborar el modelo algebraico o tabular.

Referencias

- Ávila C., Chourio, E., Casadei L. & Alvarez, Z. (2007). El software matemático como herramienta para el desarrollo de habilidades del pensamiento y mejoramiento del aprendizaje de las matemáticas. *Revista Electrónica “Actualidades Investigativas en Educación”*, 7(2).
- Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas*. Buenos Aires: Editorial Zorzal
- Blum, W. & Borromeo, R. (2009). Mathematical Modelling: Can It Be Taught And Learnt? *Journal of Mathematical Modelling and Application*, 45-48.
- Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht: Reidel
- Forero, A. (2016). *La modelación matemática: un instrumento para el análisis de fenómenos reales*. Curso hecho en Encuentro Distrital de Educación Matemática: Bogotá
- Duval, R. (1999): *Semiosis y pensamiento humano: Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Universidad del Valle: Cali.
- Guzmán, C. & Ávila, J. (2020). *Procesos de generalización en situaciones asociadas a contextos algebraicos: una experiencia con estudiantes de grado séptimo de educación básica (11-13 años)* [Tesis de maestría, Universidad Francisco José de Caldas]. Repositorio de la U.D.
- Guzmán, C. & Ladino, A. (2018). Desde la educación estadística crítica hacia un ambiente de aprendizaje por medio de la separación de residuos. En Universidad Distrital, Facultad de Ciencias y Educación (Ed.), *Encuentro Distrital de Educación Matemática EDEM* (pp. 80-86). Bogotá, Colombia: Universidad Distrital.
- Martín, J. (2001). Enseñanza de procesos de pensamiento: Metodología, metacognición y transferencia. *RELIEVE*, 7(2), 73-88.