

Artículo de investigación

La Formación de Conceptos Geométricos a partir de la Integración de Significados

Autora: **Guadalupe Mariscal Muñoz**

Correo electrónico: guadalupe.mars24@gmail.com

Universidad de Guadalajara y Universidad Internacional de la Rioja

Fecha de recepción: 2020 febrero 28; Aceptado: 2020 mayo 28

Resumen

En el presente artículo se presentan los resultados obtenidos al llevar a cabo una investigación que tenía como propósito conocer la forma en la que los alumnos de educación primaria se conducen en el aprendizaje de la geometría; pretende comprender la evolución en el razonamiento que se lleva a cabo al interactuar con objetos de su entorno y representaciones geométricas, identificando los elementos en el análisis, reconociendo propiedades y contextualizando los saberes en su sentido operativo, de manera que el constructo conceptual favorezca los procesos de resolución de problemas. Se consideran como principales referentes teóricos el modelo Van Hiele y la teoría de las imágenes conceptuales de Tall y Vinner. Para la investigación de tipo cualitativa se adoptó el método etnográfico, por medio de la observación, entrevistas, notas de campo, grabaciones en video y pruebas disciplinares, se realizó un análisis del desempeño de los alumnos al resolver diversas situaciones problema; de ahí se identificaron seis niveles de desarrollo conceptual donde se desenvuelven los alumnos construyendo y haciendo uso de habilidades de visualización, construcción, representación e integración de significados al trabajar conceptos geométricos y aplicarlos en la resolución de problemas. Se identificó que la mayoría de los alumnos participantes se encuentran en un nivel interpretativo donde sus construcciones conceptuales surgen de su percepción y se expresan empleando términos arbitrarios que comunican los significados de una forma arbitraria e informal. Se reconoce la importancia de fortalecer los procesos de enseñanza y aprendizaje que favorezcan en los alumnos el desarrollo de conceptos sólidos y amplios que faciliten la resolución de problemas geométricos.

Palabras clave: Aprendizaje, conceptos, geometría, matemáticas, razonamiento

Abstract

The purpose of this research is to know how elementary school students conduct themselves in the learning of geometry; it aims to understand the evolution of reasoning in the interaction with objects from its environment and geometric representations, identifying the elements in

the analysis, recognizing properties and contextualizing the knowledge and make it operational, that conceptual construct advantage the problem resolution. The model developed by Van Hiele and the theory of the concept image of Tall and Vinner are considered the main theoretical references. It is a qualitative research, with an ethnographic method, through observation, interviews, field notes, video recordings, and disciplinary tests; for an analysis of the students' performance solving problem situations; hence were identified six levels of conceptual development where students learn by building and making use of visualization, construction, representation and integration skills of meanings working geometric concepts and applying them in problem-solving. It was identified most of the participating students were at the interpretive level where their conceptual constructions arise from their perception and are expressed using arbitrary terms; they communicate meanings using an arbitrary and informal language. It assumes the importance of strengthening the teaching and learning process, for the advantage of the development of solid and broad concepts that facilitate the resolution of geometric problems.

Keywords: Learning, concepts, geometry, mathematics, reasoning.

Introducción

El propósito del presente artículo es dar cuenta de los resultados obtenidos a través de una investigación acerca del proceso de aprendizaje de conceptos en geometría, por parte de alumnos de educación primaria; así como el desarrollo de habilidades cognitivas que favorecen el razonamiento y la solución de problemas en ésta área de las matemáticas.

El desarrollo de las diferentes disciplinas científicas a lo largo de la historia ha sido producto de la curiosidad e interés del ser humano por entender los fenómenos que le rodean. Un caso particular de esto se presenta en las matemáticas dentro del área de la geometría, que ha consistido desde sus orígenes en el estudio de la tierra, intentando conocer y describir en términos cuantitativos las características del espacio que los rodea.

Desde entonces la geometría se ha desarrollado brindando diferentes herramientas para la lectura e interpretación del mundo al generar representaciones abstractas de los

elementos presentes en el espacio como puntos, líneas, figuras y cuerpos geométricos, que permiten realizar un análisis formal de los elementos reales.

Sin embargo, el estudio de esta rama de las matemáticas en el contexto de la escuela primaria se ha simplificado, de forma que en los primeros grados se le asocia simplemente a la identificación de figuras prototípicas con sus nombres y en los grados superiores a la sistematización de fórmulas convencionales para calcular elementos como el área o perímetro, desvinculando en ambos casos el sentido práctico y analítico de la actividad geométrica, en relación con el contexto y la interpretación del espacio donde se desenvuelve el sujeto (Leme y Rodrigues, 2013).

Con la intención de entender el trabajo en geometría desde un punto de vista distinto, los resultados que se presentan en el artículo muestran la forma en la que los alumnos construyen sus conceptos a partir de la experiencia, el análisis y el razonamiento en la solución de problemas.

El proceso metodológico de la investigación de tipo cualitativo se llevó a cabo en tres etapas, trabajando cuatro escuelas primarias distintas con grupos de 3º, 4º y 5º grado, donde se aplicaron diferentes instrumentos para plantear el problema de investigación y recolectar datos de acuerdo a los objetivos planteados, de forma que se pudiera obtener una visión general de la forma en la que los alumnos llegan a construir significados en geometría y desarrollar habilidades espaciales.

A partir del análisis de los resultados obtenidos tras la aplicación de instrumentos, observaciones y entrevistas, se identifican seis niveles de desarrollo en la construcción

conceptual y dominio de los saberes en geometría, que se ven reflejados en el desempeño de los alumnos al resolver diversas situaciones problema y argumentar sus razonamientos.

El punto de vista asumido para la investigación entiende a los alumnos como sujetos constructores de sus aprendizajes, de forma que sus razonamientos y procesos de resolución informales se reconocen como puntos clave que diversifican la actividad geométrica, permitiendo que cada alumno se conduzca de manera autónoma de acuerdo a sus percepciones y experiencias como sustento de los conceptos construidos (Gutiérrez y Jaime, 1991).

Mediante la caracterización de la forma en la que se desenvuelven los alumnos en cada nivel se demuestra cómo la comprensión de los conceptos se nutre del uso de términos formales e informales, el reconocimiento de representaciones prototípicas, la manipulación de materiales concretos o instrumentos de medida, que llevan a concepciones muchas veces distintas de las definiciones formales de los conceptos y que repercuten en los resultados a los que llegan en la resolución de los problemas.

De esta forma se considera que debe existir un adecuado proceso de trasposición didáctica, que consiste en una transformación de las matemáticas “oficiales” para convertirlas en las matemáticas “escolares” (Gutiérrez y Jaime, 1995), a fin de que se incorporen adecuadamente los términos y procedimientos al nivel de razonamiento donde se encuentran los alumnos; pues recordemos que la transición por estos niveles, según Van Hiele (en Gutiérrez y Jaime, 1991) surge a partir de explicitar y clarificar las nociones implícitas correspondientes a cada orden, de manera que estos se conviertan en saberes que estén

disponibles para ser movilizados en el desempeño de la competencia matemática. Así, si los alumnos no llegan a identificar y comprender los conceptos geométricos que les permitan ejecutar procedimientos, entonces llegar a la solución de un problema que integre los diferentes términos constituirá un auténtico reto.

Se reconoce la importancia de potenciar el estudio de esta área de las matemáticas en la escuela primaria, con el fin de favorecer el desarrollo de estrategias para que los alumnos logren un pleno desarrollo de sus conocimientos y habilidades geométricas a nivel conceptual y operativo, de forma que llegue a ser una auténtica herramienta de interpretación del espacio y comunicación con el entorno.

Marco teórico

El principal referente teórico considerado es el trabajo desarrollado por los esposos Pierre M. Van Hiele y Dina Van Hiele a partir de 1957. Ellos proponen un modelo para la didáctica de la geometría, dividido en dos partes, la primera se refiere a cinco niveles de razonamiento geométrico, por el que avanzan hasta para llegar a deducciones formales abstractas. La segunda parte del modelo consiste en cinco fases de aprendizaje, que pretenden conducir a los alumnos en la apropiación de cierto contenido geométrico, a fin de acceder al nivel de razonamiento superior (Gutiérrez y Jaime, 1991). El modelo también señala que hay diversos elementos importantes implicados en el aprendizaje de la geometría, y entre ellos cobra especial importancia el lenguaje utilizado y la creación de esquemas significativos de pensamiento que interactúan entre sí (Fouz, 2013).

La teoría de Vinner también cobra especial relevancia en lo que se refiere al término ‘*concept image*’ (imagen conceptual), que se refiere a todo lo evocado en la memoria, algo no necesariamente verbal asociado en nuestra mente con el nombre del concepto, puede ser una representación visual del concepto en el caso que el concepto tenga representaciones visuales; también puede ser una colección de impresiones o experiencias, postula la existencia de dos celdas diferentes en nuestra estructura cognitiva; una para la definición del concepto y otra para la imagen conceptual (Font, 2001), que interactúan y se complementan en la comprensión del concepto.

Considerando también el marco de la corriente constructivista, que permea las bases del sistema educativo mexicano, a partir del paradigma psicogenético de Jean Piaget, se entiende que el sujeto cognoscente tiene un papel activo en el proceso del conocimiento, pues la información que provee el objeto es importante, pero no suficiente para que el sujeto la conozca, por lo que la información sensorial está condicionada por los marcos conceptuales que orientan el proceso de adquisición de los conocimientos y éstos son construidos por el sujeto cuando interactúa con los distintos objetos (Hernández, 1998).

Finalmente también se consideran los postulados de Jerome Bruner, quien asume al hombre como un ser cultural que construye y deconstruye los significados para asimilar su realidad, para él el origen de los significados se encuentra en dos vías opuestas que se entrecruzan en el ser humano por medio de la negociación. La primera es de origen biológico y la otra de origen cultural. Esta visión refleja la postura constructivista de este autor, ya que

reconoce la influencia de elementos internos y externos en esta construcción (Arcila, 2010), clave en los procesos de aprendizaje.

A partir de lo establecido hasta el momento se pretende observar la manifestación de los distintos niveles de desempeño en la actividad geométrica de los alumnos, aplicando el modelo de Van Hiele, entendiendo cómo transitan de uno a otro.

Metodología

La investigación es de carácter cualitativo, pues pretende comprender los procesos que llevan a cabo para lograr la construcción de significados en el aprendizaje de la geometría, a partir del análisis de situaciones particulares que se presentan en clase con alumnos de educación primaria. Adopta un enfoque etnográfico, ya que la intención gira en torno a conocer, analizar y generar una explicación de la evolución de los procesos que siguen los niños en el aprendizaje de la geometría.

La técnica de investigación que se llevó a cabo fue la observación, por lo que se apoya en registros de clase levantados durante las jornadas de práctica docente; y se enriquece con el apoyo de instrumentos propios de la investigación cualitativa tales como: entrevistas, notas de campo, listas de cotejo, audio y videograbaciones para dar profundidad y sustento a la información recabada.

La investigación se llevó a cabo en tres etapas que se desarrollaron en cuatro escuelas distintas. La selección de los alumnos participantes en el estudio responde a un muestreo

intencional, donde “el investigador selecciona los casos que son más representativos, en el sentido de que tienen más capacidad de proporcionar la información más grande y más rica para los objetivos de la investigación dependiendo del diseño y de los objetivos” (Penalva, et al., 2015: 33). De forma que la cantidad de alumnos participantes en cada etapa responde a las características e intencionalidad del objetivo correspondiente. A continuación se describen a grandes rasgos las muestras con los que se trabajó cada una de las etapas de la investigación, aspectos generales del grupo y la escuela.

La primera etapa de la investigación se llevó a cabo en jornadas de dos semanas en los meses de octubre y diciembre de 2014, en un grupo de 4° grado conformado por 36 alumnos de una Escuela Primaria ubicada en la zona de Huentitán el Alto de Guadalajara, Jalisco; donde se levantaron registros de lo sucedido en clases de matemáticas abordando diferentes contenidos, entre ellos la clasificación de triángulos y el reconocimiento de los elementos de análisis que conforman cuerpos geométricos. El análisis de los registros llevó al planteamiento de los primeros supuestos y comienza el planteamiento del problema de investigación ubicado dentro del área de la geometría.

La segunda etapa de la investigación correspondió a identificación del problema de investigación, planteamiento de una pregunta inicial de investigación y la delimitación del objeto de estudio. La primera fase se trabajó en un grupo de 4° grado conformado por 14 alumnos en una escuela del turno vespertino ubicada en el Sector Libertad de la ciudad de Guadalajara, Jalisco, durante el periodo del 20 al 28 de abril de 2015, llevándose a cabo un total de cuatro sesiones de trabajo con el grupo. Durante la segunda fase se pretendía focalizar

el objeto de estudio, y llevó a cabo durante los días 4 y 5 de junio de 2015 con un grupo de 3° grado conformado por 30 alumnos pertenecientes a una escuela ubicada en Tlaquepaque, Jalisco.

La tercera etapa de la investigación corresponde a las jornadas de práctica docente que se llevaron a cabo en dos fases de cuatro semanas cada una: la primera del 21 de septiembre al 16 de octubre, y la segunda del 17 de noviembre al 11 de diciembre. El objetivo en esta etapa de la investigación consistió en indagar acerca de las categorías identificadas en el objeto de estudio. Para esto se seleccionó un grupo de 5° grado, pues es el grado de escolaridad primaria que cuenta con la carga más fuerte de contenidos correspondientes al Eje Temático “Forma, Espacio y Medida”. En una escuela del turno matutino en Zapopan, Jalisco. El grupo estaba conformado originalmente por 16 alumnos, sin embargo al comienzo de la segunda fase se incorporaron dos alumnos más; en esta etapa se trabajaron de manera regular al menos dos sesiones semanales de matemáticas, abordando contenidos geométricos y aplicando instrumentos correspondientes a la investigación.

Resultados

A partir del análisis de registros, videos de las clases y las respuestas de los alumnos a los instrumentos aplicados, se revisó su desempeño al resolver problemas geométricos, y se identificaron diferentes categorías que se refieren al grado de construcción y dominio de los conceptos geométricos implicados.

Ante esto se entiende por problemas geométricos a las situaciones de aprendizaje donde los alumnos se enfrentan al uso y manejo de las formas en espacio haciendo una

interpretación geométrica (cualitativa o cuantitativa) del mismo, y por conceptos geométricos a todos los saberes asociados a la percepción e identificación del espacio, integrando definiciones formales, representaciones materiales o físicas, operaciones mentales, fórmulas y procedimientos relacionados como la medición y las transformaciones isométricas.

Para llegar al conocimiento geométrico es necesario tomar conciencia de las características relevantes de las figuras para representarlas, reproducirlas o transformarlas, de forma que es necesario identificar sus elementos constitutivos, proceso que se lleva a cabo de forma natural y la escuela simplemente busca llegar a sistematizar los conocimientos (Gálvez, 1985), logrando fomentar así en los alumnos el dominio de saberes formales contextualizados en la experiencia concreta.

Se reconoce la naturaleza constructiva de la geometría como ciencia, donde los conceptos responden a una secuencia y a una estructura, tanto aspectos generales como ángulos, longitudes, superficies y volúmenes, como los movimientos (traslación, rotación, simetrías, homotecias, etc.); de forma que el aprendizaje de un concepto depende del dominio de otros conceptos relacionados, que a su vez implica hacer un tratamiento multidimensional coordinando los conocimientos y procedimientos al trabajar con conceptos, ejercicios, dibujo, medidas, enseñanza de todos los elementos geométricos (López, 2013). El manejo de las distintas operaciones implicadas en la actividad geométrica es un aspecto clave en el desarrollo del pensamiento geométrico y la construcción conceptual.

Se sabe que la recursividad en la construcción de saberes matemáticos se presenta de forma especial en el estudio de la geometría, donde los conceptos que contribuyen al

aprendizaje (Skemp, 1980 en Dal Maso, 2007) deben estar disponibles para cada nueva etapa de abstracción, si en un nivel dado no existe un dominio adecuado de un concepto, resultará más complicado abordar contenidos que derivan de este y llegar a la formalidad.

Se observó el proceso por el que los alumnos llegan a construir conceptos en geometría en cuanto a su manejo y las herramientas que ofrecen al solucionar problemas, identificando elementos relevantes que demostraron la forma en la que se lleva a cabo el proceso de aprendizaje. Los niveles tienen que ver con el uso que se le da al conocimiento construido y al dominio con el que se desenvuelven en el campo de geometría, que se ve reflejado en la solución de problemas.

Identificación sensorial:

Se refiere a cómo los alumnos perciben los objetos y representaciones (gráficas o físicas), accediendo a los conocimientos geométricos por medio de los sentidos de la vista y el tacto. De forma que en los primeros grados los saberes en geometría provienen de vía principalmente intuitiva y experimental, que constituye la base para una posterior construcción axiomática formalizada. (León, 2008).

Un alumno que domina un concepto en este nivel identifica las características de una figura tiene como referencia principal su percepción, e intenta explicarlo verbalmente de esta forma: “la base de un triángulo es de lado así (haciendo una línea inclinada con los brazos), entonces se tomaría así (señalando el lado mayor del triángulo isósceles obtuso pegado en una hoja de trabajo, ubicado de manera horizontal), porque la base podría ser así (revisa con el dedo todo el perímetro del triángulo)” (Registro 30/11/2015); donde sus gestos

corresponden a los trazos que conforman la figura y juegan un papel importante al analizarlas, al grado de que toda la explicación proporcionada por el alumno se sustenta en cómo manipula de la figura en el espacio de la hoja de trabajo, pero no llega a formular un discurso verbal que exponga con claridad su razonamiento.

Declarativo

En la actividad geométrica los alumnos se desenvuelven enunciando datos o características específicas de los conceptos trabajados, pero no logran llegar a establecer un vínculo entre los mismos. Es en este nivel donde comienzan a desarrollarse los conceptos de forma verbal, lo que señalan Tall y Vinner (1981 en Azcárate y Camacho, 2003) es que es necesario distinguir entre “los conceptos matemáticos definidos formalmente y los procesos cognitivos que sirven para concebirlos”, de forma que las acciones que van realizando los alumnos contribuyen a la formación de su propio concepto, al margen de las características de la definición formal del mismo.

En este nivel se puede observar el caso de un alumno que, al trazar alturas de distintos triángulos logró ubicar la escuadra de manera adecuada con respecto a la base de un triángulo obtuso, sin embargo al intentar trazar la altura, lo hizo con una línea perpendicular que iba de uno de los vértices del lado que estaba considerando como base a otro de los lados, no al vértice opuesto. De manera que el alumno consideraba los términos de su concepto de “altura” independientemente de la perpendicularidad sin llegar a vincularlos explícitamente para integrar el concepto formal de altura, además de incluir elementos adicionales que no fueron tratados en clase.

Paráfrasis

Implica comenzar a reconocer propiedades de las figuras y las características que ya identificaban. Consiste en reconocer que las figuras geométricas están formadas por partes o elementos y de que están dotadas de propiedades matemáticas (Jaime y Gutiérrez, 1990), esto a partir de una interpretación propia del alumno donde expresan con sus propias palabras los significados de los elementos trabajados. En este nivel los alumnos comienzan a producir sus propias definiciones de los conceptos empleando tanto un lenguaje formal como informal.

Durante el desarrollo de la actividad referente a las alturas de triángulos otra característica que los alumnos consideraron en su concepción fue el entenderla como un eje de simetría del triángulo, pues muchos alumnos al explicar su interpretación comentaban “la altura de un triángulo es medir desde la base de un triángulo hasta la punta y ver cuánto mide hasta la punta, cuánto mide, a cuántas líneas, cuántos ángulos tiene, qué tipo de ángulos tiene: obtuso, agudo o recto de 90° ” (Registro 30/11/2015), es decir que su concepto tenía que ver realmente con todo el proceso de análisis que realizaron del triángulo en general, que es una descripción de la altura como un elemento del triángulo.

Procedimientos

Asocia los procedimientos convencionales como son la medición y el trazo que llevan a sistematizar los saberes y la comprensión que tienen los alumnos de las figuras geométricas ya no sólo en términos cualitativos, pues se introduce la parte cualitativa en el análisis y la caracterización geométrica. La medición “es considerada un recurso, una “técnica” que, en

principio permite resolver el problema planteado, pero de la cual el niño tiene que apropiarse para poder controlar internamente” (Gálvez, 1985) y juega un papel sumamente importante en lo que se refiere al manejo del espacio, pues implica una comparación entre elementos de dimensiones distintas, la convencionalidad de unidades y la diversidad de procedimientos que llevan a una referencia numérica que delimita a la figura en el espacio.

Un ejemplo de la actividad geométrica en este nivel se presentó al reproducir figuras en el geoplano y resultó interesante que los alumnos lo hicieron intentando respetar la distribución del espacio que tenía la figura en la representación original que tenían en papel. O en la clasificación de triángulos donde una alumna explica sin mucho detalle acerca de la actividad “es que los tuvimos que medir para saber qué tipo de ángulo son” (Registro 01/10/2015), con el fin de conocer su medida exacta y a partir de esta hacer su clasificación.

Integración de significados

Muestra la interrelación de significados contextualizados en la actividad geométrica y la coordinación de diversos términos que expliciten los vínculos que existen entre los conceptos, representaciones y ejemplos. En este nivel los alumnos llegan a reconocer la presencia de diversos elementos relacionados en un mismo concepto; y comprender por medio de la construcción de un esquema conceptual que asocie los significados al nombre del concepto, como lo son las representaciones gráficas, imágenes mentales, propiedades, procedimientos y sensaciones (Azcárate y Camacho, 2003: 141).

En este sentido un par de alumnos explican el razonamiento que siguieron para discriminar los ejemplos de triángulos donde se representaba correcta o incorrectamente la

altura: “con la escuadra nos salió que fuéramos bajando del vértice de acá hasta abajo (refiriéndose al vértice opuesto al que consideraron como base), y justo cuando tocó el vértice trazamos la línea con la puesta así (refiriéndose a la ubicación del cateto opuesto de la escuadra con respecto a la hoja de trabajo). Y la siguiente es esta (triángulo equilátero) que tiene que llegar del vértice al lado opuesto. -De la mitad de nuestra base lo llevamos. -Y lo dividimos de la mitad de un lado. -De la base. -Hasta el vértice” (Registro 30/11/2015), en este momento el alumno vincula de manera verbal y gráfica los diferentes conceptos geométricos con la definición de lo que está hablando, asocia de manera general los términos base, altura y vértice, además de que podemos ver lo que se señalaba en el nivel de interpretación que los alumnos asociaban a su construcción conceptual la mitad del lado considerado como base del triángulo.

Dominio operativo

Se muestra cuando los alumnos llegan a contar con los recursos necesarios para que el concepto se explote su dimensión operativa en la solución de problemas. La relevancia del trabajo geométrico en este nivel radica en lo que señala Regiene Douady (1988 en González y Weinstein, 2000) acerca de los conocimientos matemáticos que “deben ser construidos por los alumnos en un proceso dialéctico, de forma que los saberes pasan de ser instrumentos, herramientas, recursos para resolver problemas hasta considerarlos objeto de estudio en sí mismo. Esta relación se conoce con el nombre de dialéctica instrumento-objeto”, y demuestra cómo los alumnos evolucionan progresivamente en la construcción de sus conceptos hasta llegar a manejarlos de forma autónoma como una herramienta para la solución de problemas.

De esta forma los alumnos que presentan una construcción de conceptos operativos generaron procedimientos propios para dar solución a los problemas, por ejemplo al trabajar con áreas de cuadriláteros una pareja de alumnos que realizó divisiones de lo que ellos consideraban el área de la figura, obtenida mediante el conteo, entre la medida de uno de los lados de la figura, y presentaban como respuesta el cociente de dicha división (Registro 07/12/2015); este procedimiento muestra cómo tradujeron su interpretación del problema a operaciones numéricas.

Si bien en los trabajos realizados por los alumnos en los grupos estudiados no se demuestra que logren un dominio total de los conocimientos geométricos a nivel conceptual ni de resolución de problemas, el análisis a través de los niveles identificados da luces acerca de la forma en la que evolucionan los alumnos al construir significados, así como los procesos que intervienen en el logro de dicho proceso, como son la visualización, medición y la aplicación de transformaciones isométricas.

También se pudo observar la forma en que las concepciones de los alumnos, en algunos casos incompletas o arbitrarias influenciaron su desenvolvimiento al desarrollar actividades geométricas, demostrando diferentes grados de análisis e integración de significados, que repercutían en las respuestas que daban a las situaciones problema.

De esta forma lo estudiado en la investigación permitió un acercamiento a los fenómenos que se presentan en el aprendizaje de la geometría en el entorno escolar, esta visión de plano general ayuda a comprender cómo se da el proceso de construcción de

significados y las potencialidades de los conocimientos y habilidades que se desarrollan en cada uno de los niveles de formas distintas.

Conclusiones

El análisis del desempeño de los alumnos en los instrumentos aplicados llevaron a identificar seis niveles en la construcción de conceptos en los que se desenvuelven los alumnos al trabajar contenidos de geometría, de acuerdo al grado de análisis y las interpretaciones que realizan de representaciones gráficas, concretas, descripciones enunciados verbales, declaración de procedimientos y solución de problemas, dotando a cada elemento de la actividad de un significado que da sentido al conocimiento geométrico

Durante desarrollo del trabajo en las sesiones de clase los alumnos presentan procedimientos y comentan explicaciones que responden a su nivel de dominio de los conceptos trabajados, a la vez que las propias actividades de aprendizaje propician un desarrollo progresivo en el razonamiento de los alumnos que los lleva a lograr construcciones conceptuales más complejas y así ascender en el nivel de operatividad de los mismos hasta lograr una solidez en la comprensión y aplicación de los elementos semánticos que le permitan aplicar de manera generalizada y consciente el mismo concepto con sus herramientas en diferentes situaciones de resolución de problemas.

Considerando la progresión por los niveles, se identificaron algunos elementos esenciales que conforman los conceptos geométricos como son el nombre del concepto, su definición verbal, el reconocimiento de ejemplos en representaciones gráficas y concretas, la producción de ejemplos por medio de ilustraciones o modelos y el uso de símbolos

convencionales para expresar un concepto; y se manifiestan en la aplicación de técnicas como la medición y las transformaciones isométricas, la interpretación y resolución de problemas.

La intención de trabajar el estudio de la geometría bajo este enfoque es que los alumnos lleguen a identificar su sentido práctico con relación a las experiencias en la vida cotidiana, reconocer su sentido instrumental para la solución de problemas y establecer un vínculo claro entre los conocimientos declarativos y los operativos, que se enriquecen mutuamente y una adecuada movilización permite aplicar con libertad los recursos que la matemática ofrece.

A partir del análisis de los instrumentos aplicados y del desempeño en clase de los alumnos se confirmó que el lenguaje es un elemento clave en la construcción de significados, pues conforme los alumnos analizan su entorno comienzan a establecer relaciones de significado con los objetos geométricos que conocen, asociando en los primeros niveles la interpretación a palabras coloquiales y términos arbitrarios, que posteriormente se formalizan en los nombres de los conceptos convencionales. Además, las explicaciones verbales de procedimientos es un aspecto importante, ya que para los alumnos resulta más sencillo expresar sus concepciones de manera oral, dotando además a estas del sentido social que les da sentido.

En el estudio realizado se identificó que la mayor parte del tiempo los alumnos estudiados se encuentran en el nivel de paráfrasis donde su actividad geométrica consiste en la interpretación y construcción de significados a partir de su percepción y su experiencia al

trabajar en geometría, de forma que demostraban dominio de los conceptos y manejaban tanto términos formales como arbitrarios para expresar su razonamiento.

El desarrollo de conceptos de forma progresiva favorece la integración cada vez más compleja de significados asociados a un mismo concepto, brindando a los alumnos la posibilidad de movilizar los diferentes términos trabajados aplicándolos según su criterio en la resolución de problemas geométricos, como se observa en la evolución por los distintos niveles de razonamiento.

La máxima expresión del dominio de un concepto se logra cuando los alumnos son capaces de aplicarlo de manera consciente en la interpretación y resolución de un problema, de forma que le dé herramientas claves que permitan visualizar todos los elementos que conforman la construcción conceptual tanto de forma gráfica, verbal y operativa de los saberes asociados.

Algunos de los aspectos que intervienen en el proceso de aprendizaje de la geometría son, como ya mencionábamos, las experiencias escolares o extraescolares de los alumnos al observar, manipular e interpretar objetos geométricos, así como los procesos de razonamiento y construcción de significados a partir del análisis hasta la resolución de problemas aplicando los conceptos construidos desde su sentido operativo.

Los momentos de discusión y argumentación en clase también tienen un papel relevante pues favorecen a los alumnos la construcción de enunciados verbales que expresen los significados construidos alrededor de procedimientos, operaciones, análisis y concepciones trabajados. De forma que uno de los principales retos consiste en establecer un

auténtico vínculo entre los mismos conceptos y explotar su sentido operativo para que el uso que le den los alumnos tenga un sentido claro en la construcción de los conceptos.

Si bien el conocimiento de los procesos que desarrollan los propios alumnos al construir conceptos es clave para fundamentar y dar sentido a la actividad pedagógica, es sólo el primer paso que ayuda a los alumnos a llegar a desenvolverse de manera autónoma y completa en las actividades aplicando de forma consciente sus concepciones, para mostrar un dominio pleno de los conocimientos y habilidades geométricas que les ayuden a desenvolverse en las situaciones cotidianas relacionadas con las figuras y el espacio.

Se espera que el trabajo sienta un precedente que pueda ser de ayuda para profundizar en la comprensión de los procesos de aprendizaje en geometría, y pueda servir como base para lo que podrían ser futuros estudios que ahonden en la comprensión de los procesos cognitivos que intervienen en cada uno de los niveles y determinan el desenvolvimiento de los alumnos, así como la forma en la que se relacionan entre sí los diferentes momentos de análisis, interpretación, abstracción y representación. Además de dar un sustento que pueda generar estrategias que favorezcan el desarrollo del pensamiento matemático, potenciado por el trabajo en el aula y estableciendo un vínculo auténtico con el contexto.

Referencias Bibliográficas

Amster, P. (2006): La matemática como una de las bellas artes. Divulgación matemática, Editorial Siglo XXI, ISBN: 978-987-1105-92-2, 128 págs.

Andrade, J. (2009), Uso de la tecnología en la enseñanza de la geometría tridimensional en la escuela primaria, Universidad Pedagógica Nacional, México, D.F.

Arcila, P.; Mendoza, Y.; Jaramillo, J.; Cañón, O. (2010). Comprensión del significado desde Vygotsky, Bruner y Gergen. *Diversitas: Perspectivas en Psicología*, Enero-Junio, 37-49.

Azcárate, C. y Camacho, M. (2003), Sobre la investigación didáctica del análisis matemático, Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, Vol. X, No. 2, págs. 135-149.

Beltrametti, M.; Esquivel, M. y Ferrari, E. (2003), Teoría de Van Hiele y Cabri- Géomètre en la construcción de transformaciones rígidas del plano, Facultad de Cs. Exactas y Naturales y Agrimensura - UNNE, Argentina.

Beyer K., W. O. (2001). Algunos aspectos epistemológicos de la matemática: ¿Es la matemática un lenguaje? *Educere*, 5(14) 236-240. Recuperado de <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=35601418>.

Butto, C. & Rojano, T. (2004). Introducción temprana al pensamiento algebraico: abordaje basado en la geometría. *Educación Matemática*, 16(1) 113-148. Recuperado de <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=40516105>.

Chamorro, M. (2003). Didáctica de las matemáticas para primaria. Pearson Educación, España, ISBN: 84-205-3454-4.

Dal Maso, M. (2007), Dificultades en las demostraciones en geometría, *Premisa*, Soarem 35, págs 26-36,

- Font, V. (2001), Algunos puntos de vista sobre las representaciones en didáctica de las matemáticas, Departamento de Didáctica de las CCEE y la Matemática de la Universidad de Barcelona.
- Fouz, F. (2013), Modelo de Van Hiele para la didáctica de la Geometría, Berritzegune de Donosti
- Gálvez, G. (1985). La descripción de las figuras geométricas en el aprendizaje de la geometría. Informe sobre una experiencia desarrollada en dos Cuartos Años del Colegio Estados Americanos de la Corporación Municipal de Las Condes.
- González, A., Weinstein, E. (2000), ¿Cómo enseñar matemática en el jardín?, Buenos Aires, Colihue S.R.L.
- Guillén, G. (2000), Sobre el aprendizaje de conceptos geométricos relativos a los sólidos. Ideas erróneas, Enseñanza de las ciencias, Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de València, España, pág. 35-53.
- Gutiérrez, A. (2004): Reflexiones sobre la enseñanza de la geometría euclidiana en secundaria, Yupana (Revista de Educación Matemática) 1, pp. 11-26.
- Gutiérrez, A. y Jaime, A. (1991): El modelo de razonamiento de Van Hiele como marco para el aprendizaje comprensivo de la Geometría. Un ejemplo: Los Giros. Educación matemática (2), vol. 3, pp. 49-65.

- Gutiérrez, A. y Jaime, A. (1995): Geometría y algunos aspectos generales de la educación matemática. ("una empresa docente": Bogotá y Grupo Editorial Iberoamérica: México).
- Hernández, G (1998) Paradigmas en Psicología de la Educación, Editorial Paidós, México D.F., 267 páginas.
- Jaime, A. y Gutiérrez, A. (1990). Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría: el modelo de Van Hiele. En Llinares, S. y Sánchez, M. V. (eds.), Teoría y práctica en educación matemática. Sevilla: Alfar (Ciencias de la educación, núm. 4), pp. 295-384.
- Jaime, A.; Chapa, F.; Gutiérrez, A. (1992): Definiciones de triángulos y cuadriláteros: Errores e inconsistencias en libros de texto de E.G.B., Epsilon, 23, 49-62.
- Lastra, S. (2005), Propuesta metodológica de enseñanza y aprendizaje de la geometría, Universidad de Chile.
- Leme, M.; Rodrigues, W. (2013), Aritmética e geometria nos anos iniciais: o passado sempre presente. Revista Educação em Questão, 47(33),178-206.
- León, T. (2008), Concepción didáctica para la enseñanza y el aprendizaje de la geometría con un enfoque dinámico en la educación primaria, Instituto Central de Ciencias Pedagógicas, Editorial Universitaria, La Habana.

- López, F. (2013), *Didáctica de la geometría: análisis de la enseñanza de la geometría a partir de un estudio de campo según el modelo de Van Hiele*, Universidad Complutense de Madrid.
- Pachano, L.; Teran, M. (2008), *Estrategias para la enseñanza y aprendizaje de la geometría en la educación básica: una experiencia constructivista*. *Paradigma* [online], vol.29, n.1, pp. 133-146. ISSN 1011-2251.
- Rey, J. L. (2004). *Dificultades conceptuales generadas por los prototipos geométricos*. *Premisa* 6 (22). (3-12).
- Saradella, O., Berio, A., Mastucci (2004), *El pensamiento geométrico espacial en los diferentes niveles de enseñanza*, *Números*, Volumen 57, págs. 43-52.
- Sarasua, J., Arrieta, M. (2010), *Relación entre los niveles de Van Hiele y la adquisición de habilidades de representación externa de figuras planas*, Universidad del País Vasco, 7 págs.
- Souza, S.; Soliani, V. (2012). *Geometria na educação infantil: da manipulação empirista ao concreto piagetiano*. *Ciência & Educação* (Bauru), Sin mes, 951-963.
- Torregrosa, G.; Quesada, H. (2007). *Coordinación de procesos cognitivos en Geometría*. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, julio, 275-300.

Turégano, P. (2006): Una interpretación de la formación de conceptos y su aplicación en el aula. Ensayos: Revista de la Facultad de Educación de Albacete, ISSN 0214-4824, Nº. 21, 2006, págs. 35-50.